

178

Олимпиада по математике
ученика 11 класса
Хаджиевой Алены.

Задача 3.

Дано:

$ABCD$ - трапеция.

$$AD = 1$$

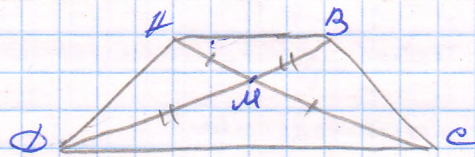
$$BC = 2$$

$$AD = 1$$

$$BC = 2$$

$$AD = 1$$

$$AD = ?$$



Решение:

$$\frac{AM}{BM} = \frac{CM}{DM}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{2}{x}$$

$$x = \frac{2 \cdot 1}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

Ответ: 2.

Задача 4.

$$a) \cos 2x - \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + 1 = 0$$

$$2\cos^2 x - 1 - \sqrt{2} \cos x + 1 = 0$$

$$2\cos^2 x - \sqrt{2} \cos x = 0$$

$$\cos x (2\cos x - \sqrt{2}) = 0$$

$$\cos x = 0$$

или

$$2\cos x - \sqrt{2} = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$2\cos x = \sqrt{2} \quad (\div \frac{1}{2})$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k$$

$$b) \frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{7\pi}{4} + 2\pi k \in [-4\pi; -\frac{5\pi}{2}]$$

Задача 5.

Пусть x - число десятиклассников, то $30-x$ - число одиннадцатиклассников

$$7x = 8 \cdot (30 - x)$$

$$7x = 240 - 8x$$

$$15x = 240$$

$$x = 16 - \text{десятикласс.}$$

$\therefore 30 - 16 = 14$ - одиннадцатиклассников.

Ответ: 16; 14

Задача 2.

$$\begin{aligned} & (5 + 5^3 + 5^5 + \dots + 5^{2009}) + (5^2 + 5^4 + 5^6 + \dots + 5^{2010}) = \\ & = 5(1 + 5^2 + 5^4 + \dots + 5^{2008}) + 5^2(1 + 5^2 + 5^4 + \dots + 5^{2008}) = \\ & = (5 + 5^2)(1 + 5^2 + 5^4 + \dots + 5^{2008}) = 30(1 + 5^2 + 5^4 + \dots + 5^{2008}) \end{aligned}$$

т.к. 30 делится на 6, то и $30(1 + 5^2 + 5^4 + \dots + 5^{2008})$ делится на 6.

Задача 1.

288

олимпиадная работа
по математике

ученица 11 класса

МОУ «Лицей с 1 им. К.С. Огарова»

г. Т. Тарнаулз КБР.

Узденовой Сашей

Задача 1.

58. Любую сумму денег, большую 10 рублей, можно составить из монет в 10 и 1 рубль. Четность числа монет можно поменять, заменив 10 рублей на 2 монеты по 5 рублей. А сумма денег, меньшая 11 рублей, может быть представлена с помощью монет по 1 рублю и четность можно поменять, заменив 2 монеты по 1 рублю на монету в 2 рубля. Таким образом, любая сумма денег, большая 1 рублю, может быть уплачена как четным, так и нечетным числом монет.

Задача 2

58
$$5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2010} = 5(1+5) + 5^3(1+5) + \dots + 5^{2009}(1+5) =$$
$$= 6(5 + 5^3 + \dots + 5^{2009}).$$

Так как первый множитель делится на 6, то и все произведение делится на 6.

Задача 3.

Возможны 2 варианта: основаниями трапеции являются стороны AB и CD или AD и BC .

В первом случае:

$$\triangle AMB \sim \triangle CMD, \text{ откуда } \frac{AM}{CM} = \frac{BM}{DM} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{2}{DM} \Rightarrow DM = \frac{4 \cdot 2}{1} = 8.$$

Во втором случае:

$$\triangle AMD \sim \triangle BMC, \text{ тогда } \frac{AM}{CM} = \frac{DM}{BM} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{DM}{2} \Rightarrow DM = \frac{2 \cdot 1}{4} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Ответ: при $DM=8$ или $DM=0,5$.

Задача 4.

$$a) \cos 2x - \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 1 = 0$$

$$\cos 2x - \sqrt{2} \cos x + 1 = 0$$

$$2 \cos^2 x - 1 - \sqrt{2} \cos x + 1 = 0$$

$$2 \cos^2 x - \sqrt{2} \cos x = 0$$

$$\cos x (2 \cos x - \sqrt{2}) = 0.$$

$$\cos x = 0$$

$$2 \cos x - \sqrt{2} = 0,$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\delta) [-4\pi; -\frac{5\pi}{2}]$$

$$-4\pi \leq \frac{\pi}{2} + \pi k \leq -\frac{5\pi}{2}$$

$$k = -4; -3.$$

$$x = \frac{\pi}{2} - 4\pi = -\frac{7\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} - 3\pi = -\frac{5\pi}{2}$$

$$-4\pi \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq -\frac{5\pi}{2}$$

$$k = -2.$$

$$x = \frac{\pi}{4} - 4\pi = -\frac{15\pi}{4}$$

$$-4\pi \leq -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq -\frac{5\pi}{2}$$

$$k \notin \mathbb{Z}$$

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ б) $x_1 = -\frac{7\pi}{2}$ $x_2 = -\frac{5\pi}{2}$ $x_3 = -\frac{15\pi}{4}$

Задача 5.

Пусть x - число десятиклассников, а y - число одиннадцатиклассников, тогда $x + y = 30$
С одной стороны 8 рукопожатий, с другой 7, следовательно $8x = 7y$.

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ 8x = 7y \end{cases} \quad x = 30 - y. \quad x = 30 - 16 = 14$$

$$8(30 - y) = 7y.$$

$$240 - 8y = 7y.$$

$$-15y = -240$$

$$y = 16.$$

То есть 14 десятиклассников и 16 одиннадцатиклассников.

Ответ: 14 десятиклассники и 16 одиннадцатиклассники.